Ejercicio 3 de la Opción A del modelo 1 de 2008.

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x + \lambda y - z &= 0 \\ 2x + y + \lambda z &= 0 \\ x + 5y - \lambda z &= \lambda + 1 \end{aligned}$$

(a) [1'5 puntos] Clasifícalo según los valores del parámetro λ.
(b) [1 punto] Resuélvelo λ = −1.

Solución

(a)
La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2 & 1 & \lambda \\ 1 & 5 & -\lambda \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 0 \\ 2 & 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 5 & -\lambda & \lambda+1 \end{pmatrix}$.

Si det(A) = |A| ≠ 0, rango(A) = rango(A^*) = 3. El sistema es compatible y determinado y tiene solución única. Calculo por tanto |A|, y obtengo |A| = $3\lambda^2 - 6\lambda - 9$.
Resolvemos |A| = 0, es decir $3\lambda^2 - 6\lambda - 9 = 0$, de donde λ = -1 y λ = 3
*Si **λ ≠ -1 y λ ≠ 3**, tenemos |A| ≠ 0 con lo cual rango(A) = rango(A^*) = 3, y por el teorema de Rouche el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.*

Si λ **= -1**

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ En A como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} =$ 9 ≠ 0, rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$, porque una columna es nula, tenemos rango(A^*) = 2

Como rango(A)= 2 = rango(A^*), por el teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.

Si λ **= 3**,

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ En A como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} =$ 9 ≠ 0, rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} =$ 4(1 – 6) = - 20 ≠ 0, tenemos rango(A^*) = 3
Como rango(A)=2 ≠ rango(A^*) = 3, por el T de Rouche el sistema es incompatible, y no tiene solución.

(b)Nos piden resolverlo si λ = -1.
Hemos visto que c*omo rango(A)= 2 = rango(A^*), por el teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.*
Como rango(A)= rango(A^*) = 2, tenemos sólo dos ecuaciones (las dos últimas, con las que hemos calculado el rango de A) y dos incógnitas principales.
2x + y – z = 0
x + 5y + z = 0. Tomamos z = $\lambda \in \Re$

La solución del sistema es (x, y, z)= ((2/3) λ , (-1/3) λ , λ) con $\lambda \in \Re$

Ejercicio 3 de la Opción B del modelo 1 de 2008.

[2'5 puntos] Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&2&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\\2&1\end{pmatrix}\text{ y } C=\begin{pmatrix}-2&0&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

Calcula la matriz P que verifica AP − B = C^T (C^T es la matriz traspuesta de C).

Solución

Como |A| = $\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&2&2\end{vmatrix}=1(2-1)=1\neq 0$, A tiene matriza inversa A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^T)

AP − B = C^T, Pasando la matriz B al 2º miembro

AP = B + C^T. Multiplicando esta expresión por la izquierda por A^{-1} tenemos

A^{-1}(AP) = A^{-1} (B + C^T). Operando queda

P = A^{-1} (B + C^T).

Hacemos los cálculos

$$(B + C^T) = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\\2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&1\\0&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&-2\\1&2\end{pmatrix}$$

$$A^T=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\1&0&2\end{pmatrix},\ \mathrm{Adj}(A^T)=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix};\ A^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$P = A^{-1}(B + C^T) = \begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1&1\\0&-2\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&0\\0&-2\\2&3\end{pmatrix}$$

Ejercicio n° 3 de la opción A de septiembre de 2008

Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y + z &= a - 1 \\ 2x + y + az &= a \\ x + ay + z &= 1 \end{aligned}$$

(a) [1'5 puntos] Discútelo según los valores del parámetro a.
(b) [1 punto] Resuelve el caso a = 2.

Solución

(a)
La matriz de los coeficientes del sistema es y la matriz ampliada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si det(A) = |A| $\neq$ 0, rango(A) = rango(A^*) = 3. El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^aF-(2).1^aF \\ 3^aF-1^aF \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a-2 \\ 0 & a-1 & 0 \end{vmatrix} = -(a-2)(a-1)$$

Resolvemos |A| = 0, es decir (a - 2)(a - 1) = 0, de donde a = 1 y a = 2

*Si **a ≠ 1 y a ≠ 2** , tenemos |A| ≠ 0 con lo cual rango(A) = rango(A^*) = 3, y por el teorema de Rouche el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.*

Si **a = 1**,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$ -1 ≠ 0, tenemos rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} 2^aF-3^aF = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, tenemos rango($A^*$) = 3

Como rango(A)= 2 ≠ rango(A^*) = 3, por el teorema de Rouche el sistema es incompatible y no tiene solución.

(b) Si **a = 2**,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$ -1 ≠ 0, tenemos rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, porque dos columnas son iguales, tenemos rango(A^*) = 2

Como rango(A)= rango(A^*) = 2, por el teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado. Tenemos dos ecuaciones (las dos primeras, con las que hemos calculado el rango de A) y dos incógnitas principales..

x + y + z = 1
2x + y + 2z = 2. Tomamos z = $\lambda \in \Re$
Restamos ambas ecuaciones y tenemos x = 1 – λ . Sustituyendo en x + y + z = 1, nos resulta y = 0.
La solución del sistema es (x, y, z)= (1 – λ , 0, λ) con $\lambda \in \Re$

Ejercicio n° 3 de la opción B de septiembre de 2008

Sabemos que el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x - y + 3z & = & 1 \\ x + 2y - z & = & 2 \end{array}\right\}$$

Tiene las mismas soluciones que el que resulta al añadirle la ecuación ax + y + 7z = 7
(a) [1'25 puntos] Determina el valor de a..
(b) [1'25 puntos] Calcula la solución del sistema inicial de dos ecuaciones, de manera que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a la unidad.

Solución

(a) Lo que se pide es equivalente a que calcule el valor de a sabiendo que el sistema

$$\begin{array}{c} 2x - y + 3z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \\ ax + y + z = 7 \end{array}$$

es compatible e indeterminado con rango 2, (dos ecuaciones y dos incógnitas principales). Por tanto debe ser *rango(A)= rango(A*) = 2.*

En primer lugar el determinante de la matriz de los coeficientes del sistema $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ a & 1 & 7 \end{pmatrix}$ tiene que ser cero. Calculamos |A| = 40 – 5a , como |A| = 0, se deduce que a = 8.
En segundo lugar hay que comprobar también que *rango(A*) = 2* por lo que calculamos el determ.

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 8 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 28 - 16 + 1 - 16 - 4 + 7 = 0$ por lo tanto *rango(A*) = 2*

(b)El que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a la unidad, se traduce en x + y + z = 1, por tanto nos piden que resolvamos el sistema

$$\begin{array}{c} 2x - y + 3z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{array}$$

Lo haremos por Gauss y Cramer

Por Gauss

$$\begin{cases} x + y + z & = 1 \\ 2x - y + 3z & = 1 \quad 2^a F - 2.1^a F \\ x + 2y - z & = 2 \quad 3^a F - 1^a F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z & = 1 \\ 0 - 3y + z & = 1 \quad 2^a F + 3.3^a F \\ 0 + y - 2z & = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z & = 1 \\ 0 + 0 - 5z & = 2 \\ 0 + y - 2z & = 1 \end{cases}$$

, de donde z = -2/5, y = 1 + 2z = 1 – 4/5 = 1/5 y x = 1-y-z = 1-1/5+2/5 = 6/5. La solución es (x,y,z) = (6/5,1/5,-2/5)

Por Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{6}{5}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{5}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{5}$$

Y como vemos se obtiene la misma solución (x,y,z) = (6/5,1/5,-2/5).

Ejercicio n° 3 de la opción A de junio de 2008

Un cajero automático contiene sólo billetes de 10, 20 y 50 euros. En total hay 130 billetes con un importe de 3000 euros.
(a) [1'25 puntos] ¿ Es posible que en el cajero haya el triple número de billetes de 10 que de 50?
(b) [1'25 puntos] Suponiendo que el número de billetes de 10 es el doble que el número de billetes de 50, calcula cuantos billetes hay de cada tipo.

Solución

Llamamos x = número de billetes de 10 euros
y = número de billetes de 20 euros
z = número de billetes de 50 euros

Las soluciones tienen que ser números enteros y positivos.

130 billetes, se traduce en $x + y + z = 130$
3000 euros, se traduce en $10x + 20y + 50z = 3000$

a) Triple de billetes de 10 que de 50, se traduce en $x = 3z$.
Intentamos resolver el sistema

$x + y + z = 130$
$10x + 20y + 50z = 3000$
$x = 3z$.

Sustituyendo $x = 3z$ en las dos primeras nos da
$4z + y = 130$
$80z + 20y = 3000$.
Al resolver este sistema de dos ecuaciones obtenemos "$3000 = 2600 + 0.z$", lo cual es absurdo y el sistema no tiene solución.

b) Doble de billetes de 10 que de 50, se traduce en $x = 2z$.
Intentamos resolver el sistema

$x + y + z = 130$
$10x + 20y + 50z = 3000$
$x = 2z$.

Sustituyendo $x = 2z$ en las dos primeras nos da
$3z + y = 130$
$70z + 20y = 3000$.
Al resolver este sistema obtenemos como solución $x = 80$, $y = 10$ y $z = 40$.

Hay 80 billetes de 10 euros
Hay 10 billetes de 20 euros
Hay 40 billetes de 50 euros

Ejercicio nº 3 de la opción B de junio de 2008

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$.

(a) [1 punto] Halla los valores del parámetro *m* para los que el rango de A es menor que 3

(b) [1'5 puntos] Estudia si el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tiene solución para cada uno de los valores de *m* obtenidos en el apartado anterior.

Solución

(a) Si $|A| \neq 0$, el rango de la matriz A es 3. Una de las formas de calcular el determinante es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} m.m \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a F - 1^a F \\ 3^a F - 1^a F \end{matrix} = m.m \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & m-1 \\ 0 & 0 & m-1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} m^2(m-1)^2$$

(1)Si una fila (columna) de un determinante está multiplicada por un número, dicho número puede salir fuera multiplicando.
(2) El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal.

$|A| = 0$ nos da $m^2(m-1)^2 = 0$, que tiene por soluciones m = 0 (doble) y m = 1 (doble)
Por tanto si m = 0 o m = 1, el rango de A es menor de 3.

b)

Estudia si el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ según los valores de *m*

Si m = 0
La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, y rango(A) = 1

La matriz ampliada es $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y rango($A^*$) = 2, porque $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Por el Teorema de Rouche como rango(A) = 1 ≠ rango(A^*) = 2, el sistema es incompatible y no tiene solución.

Si m = 1
La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, y rango(A) = 1

La matriz ampliada es $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, y rango($A^*$) = 1.

Por el Teorema de Rouche como rango(A) = 1 = rango(A^*), el sistema es compatible e indeterminado. Tiene infinitas soluciones.

Como el rango es uno hay una ecuación y una incógnita principal.
x + y + z = 1. Tomando $y = \lambda \in \Re$ y $z = \mu \in \Re$, las soluciones son $(1 - \lambda - \mu , \lambda , \mu)$ con $\lambda , \mu \in \Re$

Ejercicio 3 de la Opción A del modelo 4 de 2008.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ ky + z &= 0 \\ x + (k + 1)y + kz &= k + 1 \end{aligned}$$

(a) [1'25 puntos] Determina el valor del parámetro k para que sea incompatible.
(b) [1'25 puntos] Halla el valor del parámetro k para que la solución del sistema tenga z = 2.

Solución

(a)
La matriz de los coeficientes del sistema es y la matriz ampliada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 1 & k+1 & k \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 1 & k+1 & k & k+1 \end{pmatrix}.$$

Para que el sistema sea incompatible rango(A) ≠ rango(A^*).
$|A| = (k^2 - k - 1) - (1)(-1) = k^2 - k$. Resolvemos $|A| = 0$, es decir $k^2 - k = 0$, de donde k = 0 y k = 1.

Si **k ≠ 0 y k ≠ 1**, *tenemos |A| ≠ 0 con lo cual rango(A) = rango(A^*) = 3, y por el teorema de Rouche el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.*

Si **k = 0**,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ En A como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, porque dos filas son iguales, tenemos rango(A^*) = 2
Como rango(A)= 2 = rango(A^*), por el teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.

Si **k = 1**,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, tenemos rango($A^*$) = 3
Como rango(A)= 2 ≠ rango(A^*) = 3, por el teorema de Rouche el sistema es incompatible, y no tiene solución.

(b)Resolvemos el sistema forzando z = 2

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ ky + 2 &= 0 \\ x + (k + 1)y + 2k &= k + 1 \end{aligned} \qquad B^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & -2 \\ 1 & k+1 & 1-k \end{pmatrix}$$

Tenemos tres ecuaciones con dos incógnitas, por tanto para que el sistema tenga solución el determinante de la matriz ampliada tiene que ser 0.

$$|B^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & -2 \\ 1 & k+1 & 1-k \end{vmatrix}_{3^a + 2^a(-1)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & -2 \\ 0 & 1 & -k \end{vmatrix} = -k^2 + 2k = 0$$, de donde k = 0 y k = 2

Como en el apartado (a) hemos que el sistema era incompatible para k = 0, sólo nos queda la solución **k = 2**.

Ejercicio 3 de la Opción B del modelo 4 de 2008.

[2'5 puntos] Halla los valores del parámetro m que hacen compatible el sistema de ecuaciones:

$$-x + 2y - 2z = 2$$
$$2x + y + z = m$$
$$x + 3y - z = m$$

Solución

(a)

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & m \\ 1 & 3 & -1 & m^2 \end{pmatrix}$.

Para que el sistema sea compatible tiene que ser rango(A) = rango(A^*).

En A como $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, por lo menos rango(A) = 2

En A como $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a + 1^a(2) \\ 3^a + 1^a(1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0$, porque dos filas son iguales, tenemos rango(A) = 2

En A^* para que el rango sea 2, el determinante $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & 3 & m^2 \end{vmatrix}$ tiene que ser 0.

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & 3 & m^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a + 1^a(2) \\ 3^a + 1^a(1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 4+m \\ 0 & 5 & 2+m^2 \end{vmatrix} =$ $-5(m^2 + 2 - 4 - m) = -5(m^2 - m - 2)$.

Resolviendo la ecuación $m^2 - m - 2 = 0$, obtenemos m = - 1 y m = 2.

Para **m = - 1 y m = 2**, el sistema dado es compatible.

Ejercicio 3 de la Opción A del modelo 5 de 2008.

[2'5 puntos] Sea **I** la matriz identidad de orden 3 y $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcula, si existe, el valor de k para el cual $(A - kI)^2$ es la matriz nula.

Solución

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(A - kI)^2 = (A - kI).(A - kI) = 0$

$(A - kI) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - k\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$

$(A - kI).(A - kI) =$

$$\begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2-1 & 2k-2 & 4k-4 \\ 2k-2 & k^2-1 & 4k-4 \\ -2k+2 & -2k+2 & k^2-6k+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Igualando todos los términos de estas dos matrices tendríamos nueve ecuaciones. Resolvemos la primera $k^2 - 1 = 0$.
Sus soluciones son k = 1 y k = .1, y la única que verifica todas las expresiones es **k = 1**

Ejercicio 3 de la Opción B del modelo 5 de 2008.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] Calcula, si existen, la matriz inversa de A y la de B.

(b) [1'5 puntos] Resuelve la ecuación matricial AX + B = A + I, donde I denota la matriz identidad de orden 3.

Solución

(a)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para que existan las matrices inversas A^{-1} y B^{-1} los determinantes de las matrices tienen que ser distinto de cero.

Como |B| = $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1(4-4) = 0$, B no tiene matriza inversa B^{-1}.

Como |A| = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a + 1^a(-1) = \\ 3^a + 1^a(-1) \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, A tiene matriza inversa

$A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^T)$

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Adj(A^T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^T) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(b) AX + B = A + I

AX = A + I – B, como existe A^{-1}, multiplicamos ambos miembros por la izquierda por A^{-1}.

$A^{-1}(AX) = A^{-1}(A + I - B)$

$IX = A^{-1}(A + I - B)$

$X = A^{-1}(A + I - B) =$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 6 \\ -3 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3 de la Opción A del modelo 6 de 2008.

(a) [1 punto] Determina razonadamente los valores del parámetro m para los que el siguiente sistema de ecuaciones tiene más de una solución:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= mx \\ x + 2y + z &= my \\ x + 2y + 4z &= mz \end{aligned}$$

(b) [1'5 puntos] Resuelve el sistema anterior para el caso m = 0 y para el caso m = 1.

Solución

(a)

$$\begin{cases} 2x+y+z=mx \\ x+2y+z=my \\ x+2y+4z=mz \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (2-m)x+y+z=0 \\ x+(2-m)y+z=0 \\ x+2y+(4-m)z=0 \end{cases}$$

Matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 2 & 4-m \end{pmatrix}$

Como es un sistema homogéneo, el sistema tiene más de una solución cuando el determinante de la matriz de los coeficientes es nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 2 & 4-m \end{vmatrix}_{3^a+2^a(-1)} = \begin{vmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 0 & m & 3-m \end{vmatrix} =$$

= (2 – m)[(2 – m)(3 – m) – m] – 1(3 – m – m) = $-m^3 + 8m^2 - 16m + 9$

Para resolver $m^3 + 8m^2 - 16m + 9 = 0$, aplicamos Ruffini

	- 1	8	- 16	9
1		- 1	7	- 9
	- 1	7	- 9	0

Una solución es m = 1, y las otras salen de resolver la ecuación $-m^2 + 7m - 9 = 0$, obteniéndose

$m = \frac{7+\sqrt{13}}{2}$ y $m = \frac{7-\sqrt{13}}{2}$

Por tanto para m = 1, $m = \frac{7+\sqrt{13}}{2}$ y $m = \frac{7-\sqrt{13}}{2}$ el sistema tiene más de una solución

(b)

En el caso de m = 0, solo tiene la solución trivial (x,y,z) = (0,0,0)

En el caso de m = 1, tiene infinitas soluciones. Tomo las ecuaciones 2ª y 3ª (con ellas el r(A) = 2)

x +y + z = 0
x +2y +3z = 0. Hacemos $z = \lambda \in \Re$

$x + y = -\lambda$
$x + 2y = -\lambda$. 2ª + 1ª(-1), y nos resulta $y = -2\lambda$ y $x = \lambda$,
por tanto la solución del sistema para m = 1 es $(x,y,z) = (\lambda, -2\lambda, \lambda)$ con $\lambda \in \Re$

Ejercicio 3 de la Opción B del modelo 6 de 2008.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix}$

(a) [1'25 puntos] Estudia el rango de A en función de los valores del parámetro k.

(b) [1'25 puntos] Para k = 0, halla la matriz inversa de A.

Solución

(a)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix}$ Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 3 = 4 \neq 0$, por lo menos rango(A) = 2

Si det(A) = |A| ≠ 0, rango(A) = 3 y si |A| = 0 rango(A) = 2.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{vmatrix}_{3^a + 1^a(-1)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -4(3 - k^2)$$

Si |A| = 0, tenemos $(3 - k^2) = 0$ de donde $k = +\sqrt{3}$ y $k = -\sqrt{3}$

Si $k \neq +\sqrt{3}$ y $k \neq -\sqrt{3}$, rango(A) = 3

Si $k = +\sqrt{3}$ o $k = -\sqrt{3}$, rango(A) = 2

(c) Si k = 0,

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$, |A| = 4(3 – 0) = 12 ≠ 0, tiene matriz inversa $A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^T)$

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $Adj(A^T) = \begin{pmatrix} -21 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$;

$$A^{-1} = \frac{1}{-12}\begin{pmatrix} -21 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 & 0 & -3/4 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/12 & 1/3 & -1/12 \end{pmatrix}$$