1

Ejercicio 3 de la Opción A de Junio de 2009

Sean F_1, F_2, F_3, las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz B de orden 3, cuyo determinante vale -2. Calcula, indicando las propiedades que utilices:
(a) [0'5 puntos] El determinante de B^{-1}.
(b) [0'5 puntos] El determinante de $(B^t)^4$ (B^t es la matriz traspuesta de B).
(c) [0'5 puntos] El determinante de 2B.
(d) [1 punto] El determinante de una matriz cuadrada cuyas filas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $5F_1 - F_3$, $3F_3$, F_2.

Solución

$B = (F_1, F_2, F_3)$ con $\det(B) = -2$.
(a) El determinante de B^{-1}.
Como $B.B^{-1} = I_3$, entonces $|B.B^{-1}| = |I_3|$ = (vii) =1 = (vi) = $|B|.|B^{-1}| = -2.|B^{-1}|$, por tanto $|B^{-1}| = -1/2$
(b) Determinante de $(B^t)^4$ (B^t es la matriz traspuesta de B).
$\det((B^t)^4)$ = (viii) = $\det(B^4)$ = (vi) =$\det(B).\det(B).\det(B).\det(B) = (-2)^4 = 16$
(c) El determinante de 2B.
$2B = 2.(F_1, F_2, F_3) = (2F_1, 2F_2, 2F_3)$, luego
$\det(B) = \det(2F_1, 2F_2, 2F_3)$ = (ii) = $2.2.2.\det(F_1, F_2, F_3) = 8.(-2) = -16$,
(d) El determinante de la matriz cuadrada cuyas filas primera, segunda y tercera son, respect., $5F_1 - F_3$, $3F_3$, F_2.
$\det(5F_1 - F_3, 3F_3, F_2)$ = (iii) = $\det(5F_1, 3F_3, F_2) + \det(-F_3, 3F_3, F_2)$ = (ii y iv) = $5.3.\det(F_1, F_3, F_2) + 0$ = (i) = -15.
$\det(F_1, F_2, F_3) = (-15).(-2) = 30$.

Propiedades utilizadas
(i) Si cambiamos entre sí dos filas el determinante cambia de signo.
(ii) Si una fila está multiplicada por un número dicho número puede salir fuera del determinante factor común multiplicando al determinante.
(iii) Si una fila de un determinante es suma de dos sumandos dicho determinante es igual a la suma de dos determinantes colocando en dicha fila el primer y segundo sumando respectivamente.
(iv) Si un determinante tiene dos filas iguales o proporcionales el determinante es cero
(v) Si una fila está multiplicada por un número dicho número puede salir fuera del determinante como factor común, multiplicando al determinante.
(vi) El determinante de un producto de matrices cuadradas es igual al producto del los determinantes de dichas matices
(vii) El determinante de la matriz identidad vale 1.
(viii) El determinante de una matriz es igual al determinante de su matriz traspuesta.

2

Sean **A**, **B**, **C** y **X** matrices que verifican $AXB = C$

a) Si las matrices son cuadradas de orden 3, y se sabe que el determinante de **A** es **3**, el de **B** es **-1** y el de **C** es **6**, calcula el determinante de las matrices **X** y **2X**

b) Si $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}$ calcula la matriz **X**

Solución

a)
Sabemos que el determinante de un producto de matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de dichas matrices, luego $|A|\cdot|X|\cdot|B| = |C| \Rightarrow |X| = \dfrac{|C|}{|A|\cdot|B|} = \dfrac{6}{3\cdot(-1)} = -2$

Como X es de orden 3, $|kX|=k^3.|X|$, luego
$|2X| = 2^3\cdot|X| = 8\cdot(-2) = -16$

b)
Para que exista la inversa de una mariz su determinante tiene que ser distinto de 0.
Veamos si |A| y |B| son distintos de cero y podemos operar de la siguiente forma:
$A^{-1}AXB=A^{-1}C \Rightarrow IXB=A^{-1}C \Rightarrow XB=A^{-1}C \Rightarrow XBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1} \Rightarrow XI=A^{-1}CB^{-1} \Rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}$

$$\left\{\begin{array}{l} |A|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{vmatrix}=-2\neq 0 \Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj } A^t=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\dfrac{1}{(-2)}\cdot\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \\ |B|=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-3+4=1\neq 0 \Rightarrow B^t=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -3\end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj } B^t=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1}=\dfrac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$X=A^{-1}CB^{-1}=\frac{1}{(-2)}\cdot\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\frac{-1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-4 & -8\\ 4 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

Es decir $X=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14 & 8\\ 8 & -5\end{pmatrix}$

3

[2'5 puntos] Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&-1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\\0&3\end{pmatrix}$.

Determina la matriz X que verifica $AX - B^t = 2C$ (B^t es la matriz traspuesta de B)

Solución

$AX-B^t=2C \Rightarrow AX=2C+B^t$

Si existe $A^{-1} \Rightarrow X=A^{-1}\left(2C+B^t\right)$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&-2&1\\-2&-1&1\\1&0&-1\end{vmatrix}=1-2+1+4=4\neq 0 \Rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

$$\text{adj}(A)=\begin{pmatrix}A_{11}=+\begin{vmatrix}-1&1\\0&-1\end{vmatrix}=1 & A_{12}=-\begin{vmatrix}-2&1\\1&-1\end{vmatrix}=-1 & A_{13}=+\begin{vmatrix}-2&-1\\1&0\end{vmatrix}=1\\ A_{21}=-\begin{vmatrix}-2&1\\0&-1\end{vmatrix}=-2 & A_{22}=+\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=-2 & A_{23}=-\begin{vmatrix}1&-2\\1&0\end{vmatrix}=-2\\ A_{31}=+\begin{vmatrix}-2&1\\-1&1\end{vmatrix}=-1 & A_{32}=-\begin{vmatrix}1&1\\-2&1\end{vmatrix}=-3 & A_{33}=+\begin{vmatrix}1&-2\\-2&-1\end{vmatrix}=-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-2&-2&-2\\-1&-3&-5\end{pmatrix}$$

$$\left(\text{adj}(A)\right)^t=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\-1&-2&-3\\1&-2&-5\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(\text{adj}(A)\right)^t=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-2&-1\\-1&-2&-3\\1&-2&-5\end{pmatrix}; \quad B^t=\begin{pmatrix}3&-1\\1&2\\0&1\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\left(2C+B^t\right)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-2&-1\\-1&-2&-3\\1&-2&-5\end{pmatrix}\left(2\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\\0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&-1\\1&2\\0&1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-2&-1\\-1&-2&-3\\1&-2&-5\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}-4&2\\2&-4\\0&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&-1\\1&2\\0&1\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-2&-1\\-1&-2&-3\\1&-2&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\3&-2\\0&7\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1-6-0&1+4-7\\1-6-0&-1+4-21\\-1-6-0&1+4-35\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-7&-2\\-5&-18\\-7&-30\end{pmatrix}$$

Luego: $X=\begin{pmatrix}\frac{-7}{4}&\frac{-2}{4}\\\frac{-5}{4}&\frac{-9}{2}\\\frac{-7}{4}&\frac{-15}{2}\end{pmatrix}$

4

Dada las matrices $A=\begin{pmatrix}3&7\\1&2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&-3\\-4&2\end{pmatrix}$

a) [1 puntos] Calcula, si existe, la matriz inversa de ***A***

b) [1'5 puntos] Calcula las matrices ***X*** e ***Y*** que satisfacen las ecuaciones matriciales ***XA = A + 2B*** y ***AY = A + 2B***

Solución

a)

$|A|=\begin{vmatrix}3&7\\1&2\end{vmatrix}=6-7=-1\neq 0 \Rightarrow \text{Existe } A^{-1} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}.\left(\text{adj } A^t\right) \Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}3&1\\7&2\end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj } A^t=\begin{pmatrix}2&-7\\-1&3\end{pmatrix} \Rightarrow$

$A^{-1}=\frac{1}{(-1)}.\begin{pmatrix}2&-7\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&7\\1&-3\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}3&7\\1&2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&-3\\-4&2\end{pmatrix}$

b)

$XAA^{-1}=\left(A+2B\right)A^{-1} \Rightarrow XI=AA^{-1}+2BA^{-1} \Rightarrow X=I+2BA^{-1}$

$X=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+2.\begin{pmatrix}1&-3\\-4&2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-2&7\\1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+2.\begin{pmatrix}-5&16\\10&-34\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-10&32\\20&-68\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9&32\\20&-67\end{pmatrix}$

$A^{-1}AY=A^{-1}\left(A+2B\right) \Rightarrow IY=A^{-1}A+2A^{-1}B \Rightarrow Y=I+2A^{-1}B$

$Y=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+2.\begin{pmatrix}-2&7\\1&-3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&-3\\-4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+2.\begin{pmatrix}-30&20\\13&-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-60&40\\26&-18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-59&40\\26&-17\end{pmatrix}$

5

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}-2&-2&1\\-2&1&-2\\1&-2&-2\end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

a) [1 punto] Calcula, si existe, $\mathbf{A^{-1}}$

b) [1'5 puntos] Resuelve el sistema **AX = 3X** e interpreta geométricamente el conjunto de sus soluciones

Solución

a)

$$\exists A^{-1}\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}-2&-2&1\\-2&1&-2\\1&-2&-2\end{vmatrix}=4+4+4-1+8+8=27\neq 0\Rightarrow \exists A^{-1}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}.\left(\text{adj } A^t\right)$$

$$A^t=\begin{pmatrix}-2&-2&1\\-2&1&-2\\1&-2&-2\end{pmatrix}\Rightarrow \text{adj } A^t=\begin{pmatrix}-6&-6&3\\-6&3&-6\\3&-6&-6\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{27}.\begin{pmatrix}-6&-6&3\\-6&3&-6\\3&-6&-6\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{27}.\begin{pmatrix}-\frac{6}{27}&-\frac{6}{27}&\frac{3}{27}\\-\frac{6}{27}&\frac{3}{27}&-\frac{6}{27}\\\frac{3}{27}&-\frac{6}{27}&-\frac{6}{27}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\\-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}\\\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}&-\frac{2}{9}\end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix}-2&-2&1\\-2&1&-2\\1&-2&-2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=3.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-2x-2y+z\\-2x+y-2z\\x-2y-2z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x\\3y\\3z\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-2x-2y+z=3x\\-2x+y-2z=3y\\x-2y-2z=3z\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}-5x-2y+z=0\\-2x-2y-2z=0\\x-2y-5z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x+2y-z=0\\x+y+z=0\\x-2y-5z=0\end{cases}\Rightarrow \text{Son tres planos}\Rightarrow \text{Ecuación homogénea}$$

$$\begin{vmatrix}5&2&-1\\1&1&1\\1&-2&-5\end{vmatrix}=-25+2+2+1+10+10=0\Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

$$\text{Son tres planos que como}\Rightarrow\begin{cases}\begin{cases}5x+2y-z=0\\x+y+z=0\end{cases}\Rightarrow\frac{5}{1}\neq\frac{2}{1}\Rightarrow \text{Se cortan según una recta}\\\begin{cases}5x+2y-z=0\\x-2y-5z=0\end{cases}\Rightarrow\frac{5}{1}\neq\frac{2}{-2}\Rightarrow \text{Se cortan según una recta}\\\begin{cases}x+y+z=0\\x-2y-5z=0\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{1}\neq\frac{1}{-2}\Rightarrow \text{Se cortan según una recta}\end{cases}$$

Se cortan en tres rectas definidas por cada par de planos

6

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}-3&1\\2&-1\end{pmatrix}$ y $B=A-kI$, donde ***k*** es una constante e ***I*** la matriz identidad de orden **2**

a) [0'75 puntos] Determina los valores de ***k*** para los que ***B*** no tiene inversa

b) [0'5 puntos] Calcula $\mathbf{B^{-1}}$ para **k = -1**

c) [1'25 puntos] Determina la constantes α y β para las que se cumple $A^2+\alpha A=\beta I$

Solución

a)

$$B=\begin{pmatrix}-3&1\\2&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}k&0\\0&k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-k&1\\2&-1-k\end{pmatrix}\Rightarrow \exists B^{-1}(\exists \text{ significa" existe al menos"})\Rightarrow |B|\neq 0\Rightarrow$$

$$|B|=\begin{vmatrix}-3-k&1\\2&-1-k\end{vmatrix}=(-1).(3+k).(-1).(1+k)-2=(3+k).(1+k)-2=3+3k+k+k^2-2=k^2+4k+1$$

$$\text{Si } |B|=0\Rightarrow k^2+4k+1=0\Rightarrow \Delta=16-4=12>0\Rightarrow k=\frac{-4\pm\sqrt{12}}{2}\Rightarrow\begin{cases}k=\frac{-4+2\sqrt{3}}{2}=-2+\sqrt{3}\\k=\frac{-4-2\sqrt{3}}{2}=-2-\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\forall x\in R-\left\{-2-\sqrt{3},-2+\sqrt{3}\right\}\Rightarrow |B|\neq 0\Rightarrow \text{Existe } B^{-1}$$

b)

$$|B|=(-1)^2+4.(-1)+1=1-4+1=-2\neq 0\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{|B|}.\left(\text{adj } B^t\right)\Rightarrow B=\begin{pmatrix}-2&1\\2&0\end{pmatrix}\Rightarrow B^t=\begin{pmatrix}-2&2\\1&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\text{adj } B^t=\begin{pmatrix}0&-1\\-2&-2\end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{(-2)}.\begin{pmatrix}0&-1\\-2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\1&1\end{pmatrix}$$

$$|B|=\begin{vmatrix}-3-k & 1\\ 2 & -1-k\end{vmatrix}=(-1).(3+k).(-1).(1+k)-2=(3+k).(1+k)-2=3+3k+k+k^2-2=k^2+4k+1$$

$$\text{Si } |B|=0 \Rightarrow k^2+4k+1=0 \Rightarrow \Delta=16-4=12>0 \Rightarrow k=\frac{-4\pm\sqrt{12}}{2} \Rightarrow \begin{cases} k=\dfrac{-4+2\sqrt{3}}{2}=-2+\sqrt{3} \\ k=\dfrac{-4-2\sqrt{3}}{2}=-2-\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\forall x \in R-\{-2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3}\} \Rightarrow |B|\neq 0 \Rightarrow \text{Existe } B^{-1}$$

b)

$$|B|=(-1)^2+4.(-1)+1=1-4+1=-2\neq 0 \Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{|B|}.(\text{adj } B^t) \Rightarrow B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow B^t=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{adj } B^t=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -2 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{(-2)}.\begin{pmatrix}0 & -1\\ -2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{cases} A^2+\alpha A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}+\alpha.\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & -4\\ -8 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\alpha & \alpha\\ 2\alpha & -\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11-3\alpha & -4+\alpha\\ -8+2\alpha & 3-\alpha\end{pmatrix} \\ \beta I=\beta.\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 11-3\alpha=\beta \\ -4+\alpha=0 \Rightarrow \alpha=4 \\ -8+2\alpha=0 \Rightarrow 2\alpha=8 \Rightarrow \alpha=4 \\ 3-\alpha=\beta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11-3\times 4=\beta \Rightarrow \beta=-1 \\ 3-4=\beta \Rightarrow \beta=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=4\\ \beta=-1\end{cases}$$

7

a) [1'75 puntos] Discute según los valores λ el siguiente sistema: $\begin{cases} 3x+\lambda y=0 \\ x+\lambda z=\lambda \\ x+y+3z=1\end{cases}$

b) [0'75 puntos] Resuélvelo para $\lambda=0$.

Solución

a)

$$\left.\begin{array}{l} 3x+\lambda y \quad =0 \\ x+ \quad \lambda z=\lambda \\ x+ \quad y+3z=1\end{array}\right\} \Rightarrow A=\begin{pmatrix}3 & \lambda & 0\\ 1 & 0 & \lambda\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\lambda^2-6\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0 \text{ y } \lambda=6$$

Por tanto:

Si $\lambda\neq 0$ y $\lambda\neq 6$, r(A) = 3 = r(A*) = nº de incógnitas, luego el sistema será COMPATIBLE DETERMINADO

$$\text{Si } \lambda=0,\ r(A)=2;\ A^*=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 3 & 1\end{pmatrix}; r(A^*)=r\begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 3 & 1\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 3 & 1\end{pmatrix}=2$$

r(A)=r(A*)=2< nº de incógnitas, luego el sistema será COMPATIBLE INDETERMINADO

Si $\lambda=6$,

$$r(A)=2;\ A^*=\begin{pmatrix}3 & 6 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 6 & 6\\ 1 & 1 & 3 & 1\end{pmatrix}; r(A^*)=r\begin{pmatrix}3 & 6 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 6 & 6\\ 1 & 1 & 3 & 1\end{pmatrix}; \begin{vmatrix}3 & 6 & 0\\ 1 & 0 & 6\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=36-6-18=12\neq 0 \Rightarrow r(A^*)=3$$

r(A)=2 $\neq$ r(A*)=3, luego el sistema será INCOMPATIBLE

b) $\lambda=0$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} 3x \quad =0 \\ x \quad =0 \\ x+ \quad y+3z=1\end{cases}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x+y+3z=1\end{array}\right\} \Rightarrow z=t \Rightarrow y+3t=1 \Rightarrow y=1-3t \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=1-3t \\ z=t\end{array}\right\} t\in\Re$$

8

Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+\lambda y+z=4 \\ x+3y+z=5 \\ \lambda x+y+z=4 \end{cases}$

a) [1'75 puntos] Discútelo según los valores de parámetro λ

b) [0'75 puntos] Resuélvelo en el caso $\lambda=1$

Solución

a)

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix}=3+\lambda^2+1-3\lambda-1-\lambda=\lambda^2-4\lambda+3 \Rightarrow$$

$$\text{Si } |A|=0 \Rightarrow \lambda^2-4\lambda+3=0 \Rightarrow \Delta=16-12=4>0 \Rightarrow \lambda=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=\frac{4+2}{2}=3 \\ \lambda=\frac{4-2}{2}=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\forall\lambda \in R-\{1,3\} \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A)=3=$Número incognitas $\Rightarrow$

Si $\lambda=3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & -2 & -8 \end{array}\right) \Rightarrow 0z=1 \Rightarrow \text{No existe valor que lo resuelva.Sistema Incompatible}$$

Si $\lambda=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 0z=0 \Rightarrow \text{Infinitas soluciones. Sistema Compatible Indeterminado}$$

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 2y=1 \Rightarrow y=\frac{1}{2} \Rightarrow x+\frac{1}{2}+z=4 \Rightarrow x=4-\frac{1}{2}-z=\frac{7}{2}-z$$

Solución $\left(\frac{7}{2}-\mu, \frac{1}{2}, \mu\right), \mu \in R$

9

[1'25 puntos] a) Resuelve el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+z=2 \\ -x+y+2z=0 \\ -x+2y+5z=2 \end{cases}$

b) [1'25 puntos] Calcula λ sabiendo que el siguiente sistema tiene alguna solución común con el del apartado a) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ -x+y+3z=1 \\ x+2y+\lambda z=-3 \end{cases}$

Solución

a)

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}=5-2+1-4=0 \Rightarrow \text{rang}(A)=2 \text{ puede ser } \begin{cases} \text{Compatible Indeterminado} \\ \text{Incompatible} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{Compatible Indeterminado}$$

$y+3z=2 \Rightarrow y=2-3z \Rightarrow x+z=2 \Rightarrow x=2-z \Rightarrow$ Solución $(2-\lambda, 2-3\lambda, \lambda)$

b)

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda+3-2-1-6+\lambda=2\lambda-6 \Rightarrow \text{Si } |A|=0 \Rightarrow 2\lambda-6=0 \Rightarrow 2\lambda=6 \Rightarrow \lambda=3$$

$\forall\lambda \in R-\{3\} \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A)=3=$Número incognitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado

Si $\lambda=3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Solución Sistema Compatible Determinado

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & \lambda \end{vmatrix}}{2\lambda-6}=\frac{\lambda+9+2-3-6-\lambda}{2\lambda-6}=\frac{2}{2\times(\lambda-3)}=\frac{1}{\lambda-3} \Rightarrow y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & \lambda \end{vmatrix}}{2\lambda-6}=\frac{2\lambda+14}{2\lambda-6}=\frac{\lambda+7}{\lambda-3}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{2\lambda-6}=\frac{-3+1-2-1-2-3}{2\lambda-6}=\frac{-10}{2\times(\lambda-3)}=-\frac{5}{\lambda-3}$$

10

Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y=m+1 \\ x+my+z=1 \\ mx+y-z=m \end{cases}$

a) [1'5 puntos] Determina los valores de ***m*** para los que el sistema es compatible
b) [1 punto] Resuelve el sistema en el caso **m = -1**

Solución

a)

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & -1 \end{vmatrix}=-m+m-1+1=0 \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0 \Rightarrow rang(A)=2$$

$\forall m \in R \Rightarrow rang(A)=2$

$$|A/B|=|C_1 \quad C_2 \quad B|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & m \end{vmatrix}=m^2+m+1-m^2-1-m=0 \Rightarrow |A/B|=\begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 1 \end{vmatrix}=1-m \\ \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{vmatrix}=1-m^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Si}\begin{cases} 1-m=0 \Rightarrow m=1 \\ 1-m^2=0 \Rightarrow (1+m).(1-m) \Rightarrow \begin{cases} m=1 \Rightarrow \\ m=-1 \end{cases} \end{cases}$$

$\forall m \in R-\{1\} \Rightarrow rang(A/B)=2$ $\qquad$ $m=1 \Rightarrow rang\,(A/B)=1$

$$|A/B|=|C_1 \quad C_3 \quad B|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ m & -1 & m \end{vmatrix}=m-1-m+1=0 \Rightarrow |A/B|=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$$

$\forall m \in R \Rightarrow rang(A/B)=2$

$\forall m \in R \Rightarrow rang(A)=rang(A/B)=2<$Número de incognitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow -2y+z=1 \Rightarrow z=1+2y \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow$$

$x=-y \Rightarrow$ *Solución* $(-\lambda\,,\lambda\,,1+2\lambda)$

11

Tratamos de adivinar, mediante ciertas pistas, los precios de tres productos ***A*** , ***B*** y ***C***

- Pista 1: Si compramos una unidad de ***A***, dos de ***B*** y una de ***C*** gastamos ***118 euros***
- Pista 2: Si compramos ***n*** unidades de ***A***, ***n+3*** de ***B*** y tres de ***C*** gastamos ***390 euros***

a) ¿Hay algún valor de ***n*** para el que estas dos pistas sean incompatibles?
b) Sabiendo que ***n = 4*** y que el producto ***C*** cuesta el triple que el producto ***A***, calcula el precio de cada producto

Solución

a)

$$\begin{cases} A+2B+C=118 \\ nA+(n+3)B+3C=390 \end{cases} \Rightarrow$$

$$|A|=0 \Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ n & n+3 \end{vmatrix}=n+3-2n=0 \Rightarrow 3-n=0 \Rightarrow n=3 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ n & 3 \end{vmatrix}=3-n=0 \Rightarrow 3-n=0 \Rightarrow n=3 \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ n+3 & 3 \end{vmatrix}=6-(n+3)=0 \Rightarrow 3-n=0 \Rightarrow n=3 \end{cases} \Rightarrow$$

Si $n=3 \Rightarrow rang\,(A)=1 \Rightarrow$ *Sistema Incompatible*

Es imposible,con otra ecuación más,que el rango de los coeficientes sea 3 *o* 2

b)

$$\begin{cases} A+2B+C=118 \\ 4A+7B+3C=390 \\ C=3A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+2B+C=118 \\ 4A+7B+3C=390 \\ 3A-C=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 118 \\ 4 & 7 & 3 & 390 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 118 \\ 0 & -1 & -1 & -82 \\ 0 & -6 & -4 & -354 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 118 \\ 0 & 1 & 1 & 82 \\ 0 & 0 & 2 & 138 \end{array}\right) \Rightarrow 2C=138 \Rightarrow C=\frac{138}{2}=69 \Rightarrow$$

$B+69=82 \Rightarrow B=82-69=13 \Rightarrow A+2\cdot 13+69=118 \Rightarrow A=118-26-69=23$

Solución $(23\,,13\,,69)$

12

[2'5 puntos] Una empresa envasadora ha comprado un total de 1500 cajas de pescado en tres mercados diferentes, a un precio por caja de 30, 20 y 40 euros respectivamente. El coste total de la operación ha sido de 40500 euros. Calcula cuánto ha pagado la empresa en cada mercado, sabiendo que en el primero de ellos se ha comprado el 30 % de las cajas.

Solución

x cajas de 30 euros
y cajas de 20 euros
z cajas de 40 euros

Relaciones

$x + y + z = 1500$

$30x + 20y + 40z = 40500$, dividiendo por 10 tenemos, $3x + 2y + 4z = 4050$

x = 30% de 1500 = (1500).(30/100) = **450**. Luego nos queda

$y + z = 1500 – 450 = 1050$

$2y + 4z = 4050- 3(450) = 2700$. $F_2 – 2F_1$, nos da $2z = 2700 – 2.(1050) = 600$, de donde

z = 300, y por tanto **y** = 1050 – 300 = **750**

Lo que piden es el dinero que ha pagado en cada mercado

En el **primer mercado han pagado** 30.x = 30(450) = **13500 euros**
En el **segundo mercado han pagado** 20.y = 20(750) = **15000 euros**
En el **tercer mercado han pagado** 40.x = 40(750) = **12000 euros**